Topology on commutative residuated lattices (Algebras, Languages, Algorithms in Algebraic Systems and Computations)

近藤, 通朗

数理解析研究所講究録
第 1712 巻 2010 年 132-135

Topology on commutative residuated lattices

東京電機大学・情報環境学部　近藤　通朗 (Michiro KONDO)
School of Information Environment
Tokyo Denki University

概要

ここでは，commutative residuated lattices 上の位相空間についての性質を考察することで,「$\odot$ が連続であることと $\to$ が連続であることが同値であるか？」という問題 ([1]) に否定的な解を与える．

1 Data-mining におけるラフ集合

$X \neq \emptyset$, R を X 上の２項関係とするとき，$\mathcal{P}(X)$ 上の作用素 R_+, $R_- : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を次のように定義する： $A \subseteq X$ に対して，

$$R_+(A) = \{x \in X \mid \exists y\,(xRy \cap A \neq \emptyset)\}$$
$$R_-(A) = \{x \in X \mid \forall y\,(xRy \to y \in A)\}$$

特に R が同値関係であるとき，$(R_-(A), R_+(A))$ は A のラフ集合とよばれる．任意の２項関係 R に対して，次の命題が成り立つ．

命題 1. 任意の $A, B \subseteq X$ に対して，

(1) $R_-(A) \subseteq A$
(2) $A \subseteq B \implies R_-(A) \subseteq R_-(B)$
(3) $R_-(A \cap B) = R_-(A) \cap R_-(B)$

これらの作用素と様相論理における必然性演算子，可能性演算子の類推から,（R が同値関係である）ラフ集合に自然に位相を入れることができる．このとき次のような問題が考えられた：

問１．関係がどのような場合に位相空間となるか？
問２．もとになる代数をブール代数以外で考察した場合，代数（あるいは位相空間）としてどのような性質を持つか？

問１については，X の部分集合族 $\mathcal{O}_R = \{A \subseteq X \mid R_-(A) = A\}$ について，

命題 2. R が反射的ならば，$\mathcal{O}_R$ は X 上の位相であり，次の性質 (IP) を充たす：

$$(IP) \quad A_\lambda \in \mathcal{O}_R \ (\lambda \in \Lambda) \ \text{ならば} \ \bigcap_\lambda A_\lambda \in \mathcal{O}_R$$

逆に $(X,\mathcal{O})$ が (IP) をみたす位相空間ならば，次の式をみたす反射的な関係 R が存在する：

$$\mathcal{O}=\mathcal{O}_R=\{A\subseteq X\,|\,R_-(A)=A\}$$

以下，問2について考察していく．代数へ位相を入れることは，代数における開集合を定義すること，すなわち，ある性質を持つ部分集合を定義することに他ならない．この方法によって，A.Weil らによる同値関係を用いた位相（*uniform topology*）が研究されてきた．これを用いて (bounded integral) Commutative residuated lattice 上に位相を入れた空間の性質を調べ，[1] にある問題の一般的な解決を図る．

代数構造 $(L,\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ が次の条件を満たすとき，(bounded integral) Commutative residuated lattice といわれる（今後簡単のため，CRL と表すことにする)：

(1) $(L,\wedge,\vee,0,1)$ は有界な束;
(2) $(L,\odot,1)$ は可換な monoid;
(3) 任意の $x,y,z\in L$ に対して, $x\odot y\leq z \iff x\leq y\to z$

CRL 上へ同値関係を用いた位相を入れる．$\mathcal{K}^*$ を *intersection* に関して閉じた X 上の同値関係の集合とし，$\mathcal{K}$ を次のように定義する：

$$\mathcal{K}=\{\varphi\subseteq X\times X\,|\,\theta\subseteq\varphi,\ \theta\in\mathcal{K}^*\}$$

定理 1. $\mathcal{K}^*$ において，次のことが成り立つ：

(U1) $\varphi\in\mathcal{K}^* \implies \omega\subseteq\varphi$
(U2) $\varphi\in\mathcal{K}^* \implies \varphi^{-1}\in\mathcal{K}^*$
(U3) $\varphi\in\mathcal{K}^* \implies \exists\psi\in\mathcal{K}^*;\psi\circ\psi\subseteq\varphi$
(U4) $\varphi,\psi\in\mathcal{K}^* \implies \varphi\cap\psi\in\mathcal{K}^*$

$\mathcal{K}=\{\varphi\subseteq X\times X\,|\,\exists\theta\in\mathcal{K}^*;\theta\subseteq\varphi\}$ とおけば，$\mathcal{K}$ は *uniformity*，すなわち，次の性質を持つことがわかる．

命題 3. *(U1)* $\varphi\in\mathcal{K} \implies \omega\subseteq\varphi$
(U2) $\varphi\in\mathcal{K} \implies \varphi^{-1}\in\mathcal{K}$
(U3) $\varphi\in\mathcal{K} \implies \exists\psi\in\mathcal{K};\psi\circ\psi\subseteq\varphi$
(U4) $\varphi,\psi\in\mathcal{K} \implies \varphi\cap\psi\in\mathcal{K}$
(U5) $\varphi\in\mathcal{K},\varphi\subseteq\psi \implies \psi\in\mathcal{K}$

uniformity の一般論から次のようにして X に位相を導入することができる：

$$\mathcal{O}_{\mathcal{K}}=\{O\subseteq X\,|\,\forall x\in O\ \exists\varphi\in\mathcal{K};\varphi[x]\subseteq O\},\ \varphi[x]=\{y\in X\,|\,(x,y)\in\varphi\}$$

命題 4. $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}=\{O\subseteq X\,|\,\forall x\in O,\ \exists\theta\in\mathcal{K}^*;\ \theta[x]=x/\theta\subseteq O\}$

したがって，X において

$$O\text{ が開集合} \iff O\text{ が同値類の和集合}$$

とくに，$\mathcal{K}^*=\{\theta\}$ としたときが上述のラフ集合の場合である．

命題 5. $\omega\in\mathcal{K}^* \iff \mathcal{O}_{\mathcal{K}}$: ***discrete topology***

2 連続な位相

ここでは，CRL 代数の演算が連続となる位相について考察する．$X = (X, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ を CRL，τ を X 上の位相とする．τ に関して演算 $\odot, \rightarrow$ が連続であるとき，(X, τ) は *topological CRL* であるとよばれる．すなわち，$A, B \subseteq X$ に対して，

$$A \odot B = \{x \odot y \,|\, x \in A, y \in B\}, \quad A \rightarrow B = \{x \rightarrow y \,|\, x \in A, y \in B\}$$

とおくと，任意の $O \in \tau$, $a, b \in X$ に対して，

$$\begin{array}{ll} (1) & a \odot b \in O \implies \exists O_a, O_b \in \tau\,;\, a \in O_a,\ b \in O_b \text{ and } O_a \odot O_b \subseteq O \\ (2) & a \rightarrow b \in O \implies \exists O_a, O_b \in \tau\,;\, a \in O_a,\ b \in O_b \text{ and } O_a \rightarrow O_b \subseteq O \end{array}$$

intersection に関して閉じている congruence の集合を $\mathcal{K}^*$ とすると

定理 2. $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ は *topological CRL* である．

これに関して，[1] に次の問題が残されている：

<u>問題</u>：$\odot$ が連続 $\iff$ $\rightarrow$ が連続？

これには，以下に示すように反例を与えることができ，上述のことは一般に成り立たない．$X = \{0, a, 1\}$, $0 < a < 1$ において，演算を次のように定義する：$x, y \in X$ について，

$$x \wedge y = x \odot y = \min\{x, y\}$$
$$x \vee y = \max\{x, y\}$$
$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq \text{y} \\ y & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，明らかに，$\tau = \{\emptyset, X, \{a, 1\}\}$ は X 上の位相となり，しかも $\odot$ に関しては連続であるが，$\rightarrow$ に関しては連続ではない．なぜなら，$0 \rightarrow 0 = 1 \in \{a, 1\}$ ではあるが，$X \rightarrow X = X \not\subseteq \{a, 1\}$ となるためである．

3 Filters

X を CRL とするとき，$F(\subseteq X)$ が次の条件をみたすとき，*filter* と定義される：

(F1) $1 \in F$
(F2) $x, y \in F$ ならば $x \odot y \in F$
(F3) $x \in F$ かつ $x \leq y$ ならば $y \in F$

X の filter 全体の集合を $Fil(X)$，congruence 全体の集合を $Con(X)$ とするとき，次の結果は容易に示すことができる．

定理 3. $Fil(X) \cong Con(X)$

いま，$\mathcal{K}^*$ を intersection に関して閉じた congruence の集合とすると，

定理 4. 任意の $\theta \in \mathcal{K}^*$，$x \in X$ に対して，$x/\theta = \theta[x]$ は *clopen set* である．

簡単のため，$\mathcal{K}^* = \{\theta\}$ のとき，$O_{\mathcal{K}}$ を O_θ と表す．

命題 6. $\theta, \varphi \in Con(X)$ とするとき，$\theta \subseteq \varphi \iff O_\theta \subseteq O_\varphi$

位相空間 $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ が条件

$$\forall \varphi \in \mathcal{K}\ \exists x_i \in X\,;\ X = \bigcup_i \varphi[x_i]$$

をみたすとき，*totally bounded* であるとよばれる．このとき，

定理 5. $(X, \mathcal{O}_\theta)$ が *compact* $\iff$ $(X, \mathcal{O}_\theta)$ が *totally bounded*

参考文献

[1] S.Ghorbani and A.Hasankhani, *Implicative topology on residuated lattices*, preprint.

[2] M.Haveshki, E.Eslami and A.B.Saeido, *A topology induced by uniformity on BL-algebras*, Math. Log. Quart., vol.**53** (2007), 162-169.

[3] I.M.James, *Introduction to uniform spaces,* Cambridge University Press, New York, 1990.

[4] A.B.Saeido, *Uniform topology on differential algebras,* Bull. Korean Math. Soc., vol.**42** (2005), 379-386.

Michiro Kondo
School of Information Environment,
Tokyo Denki University,
Inzai, 270-1382, Japan.
E-mail: kondo@sie.dendai.ac.jp